

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapa Locală, județul Timiș**  
**7.02.2025**

**clasa a V-a**  
**Barem de corectare și notare**

1. a) Calculați:  $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3$ .  
b) Arătați că  $2025^{2026}$  se poate scrie ca sumă de 9 cuburi perfecte nenule distincte.

**Soluție: a)**  $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 =$   
 $= 1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 + 343 + 512 + 729 = 2025$  .....3p  
**b)**  $2025^{2026} = 2025^{2025} \cdot 2025 = 2025^{2025} \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3)$  ...1p  
 $2025^{2025} = (2025^{675})^3$  .....1p  
 $2025^{2026} = (2025^{675} \cdot 1)^3 + (2025^{675} \cdot 2)^3 + (2025^{675} \cdot 3)^3 + (2025^{675} \cdot 4)^3 + (2025^{675} \cdot 5)^3 + (2025^{675} \cdot 6)^3 + (2025^{675} \cdot 7)^3 + (2025^{675} \cdot 8)^3 + (2025^{675} \cdot 9)^3$  .....2p

2. Se consideră șirul de numere naturale 57, 74, 65, 61, ..., în care fiecare termen, începând cu al doilea, este egal cu suma pătratelor cifrelor numărului precedent.  
a) Scrieți următorii patru termeni ai șirului.  
b) Fie  $S$  suma primilor 2024 de termeni ai șirului. Arătați că  $S$  nu este pătrat perfect.

(Gazeta Matematică)

**Soluție: a)**  $6^2 + 1^2 = 36 + 1 = 37$   
 $3^2 + 7^2 = 9 + 49 = 58$   
 $5^2 + 8^2 = 25 + 64 = 89$   
 $8^2 + 9^2 = 64 + 81 = 145$  .....2p  
**b)** Continuă șirul:  
 $1^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 16 + 25 = 42$   
 $4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20$   
 $2^2 + 0^2 = 4 + 0 = 4$   
 $4^2 = 16$  .....1p

Observăm repetiția a 8 termeni consecutivi, pentru că următorul termen este  $1^2 + 6^2 = 36 + 1 = 37$  ca și al V-lea termen .....1p

Suma termenilor din secvența care se repetă este:

$37 + 58 + 89 + 145 + 42 + 20 + 4 + 16 = 411$  .....1p

$(2024 - 4) : 8 = 252 \text{ rest } 4$  .....1p

Suma primilor 2024 termeni este:

$$S = 57 + 74 + 65 + 61 + 252 \cdot 411 + (37 + 58 + 89 + 145)$$

Suma nu este pătrat perfect având ultima cifră 8.....1p

3. a) Determinați restul împărțirii unui număr natural la 60 știind că dacă-l împărțim la 10 obținem restul 3 și dacă-l împărțim la 12 obținem restul 7.  
b) Într-o sală sunt așezate 50 de scaune pe fiecare rând, numerotarea scaunelor făcându-se în ordine crescătoare de la 1 la  $n$  începând de la primul rând din față. Dacă Andrei ocupă locul

cu numărul 1025 pe rândul din mijloc, iar Ana ocupă locul de pe ultimul rând situat în dreptul lui Andrei, determinați valoarea lui  $n$  și numărul locului ocupat de Ana.

**Soluție:** a)  $n = 10 \cdot c_1 + 3$

$$n = 12 \cdot c_2 + 7 \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow 6n = 60 \cdot c_1 + 18 \Rightarrow 6n = 60(c_1 - 1) + 60 + 18$$

$$\text{și } 5n = 60 \cdot c_2 + 35 \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow n = 60(c_1 - 1 - c_2) + 78 - 35 \Rightarrow n = 60(c_1 - c_2 - 1) + 43, \quad 0 < 43 < 60$$

$$\Rightarrow \text{restul împărțirii lui } n \text{ la } 60 \text{ este } 43 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{b) } 1025 : 50 = 20 \text{ rest } 25 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Deci, Andrei stă pe locul } 25 \text{ de pe rândul } 21 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Rândul } 21 \text{ fiind rând de mijloc, deduce că sunt: } 2 \cdot 20 + 1 = 41 \text{ rânduri și } 41 \cdot 50 = 2050 \text{ scaune în total } \Rightarrow n = 2050. \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Ana ocupă locul } 40 \cdot 50 + 25 = 2025. \dots\dots\dots 1p$$

4. a) Determinați numărul natural format doar cu cifre de 2 știind că dacă-l mărim de 2025 ori obținem un număr natural care conține 2025 cifre de 9.

b) Numerele naturale  $a, b, c, x, y, z$  verifică relația:

$$2021^x + 2023^y + 2025^z = 2020^a + 2022^b + 2024^c.$$

$$\text{Determinați valoarea produsului: } P = (2024^x \cdot 2025^y \cdot 2026^z)^{a \cdot b \cdot c}.$$

**Soluție:**

$$\text{a) Fie } A = \underbrace{22 \dots 2}_{n \text{ ori}}$$

$$\text{Dacă } n = 2 \text{ atunci } 22 \cdot 2025 = 44550 \text{ nu convine}$$

$$\text{Dacă } n = 3 \text{ atunci } 222 \cdot 2025 = 449550 \text{ nu convine}$$

$$\text{Dacă } n = 4 \text{ atunci } 2222 \cdot 2025 = 4499550 \text{ nu convine } \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Observăm că numărul cifrelor de } 9 \text{ ale produsului este cu } 2 \text{ mai mic decât numărul cifrelor de } 2 \text{ ale numărului initial } \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Deci, } n - 2 = 2025 \Rightarrow n = 2027 \Rightarrow A = \underbrace{22 \dots 2}_{2027 \text{ ori}} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{b) Cum pentru oricare numere naturale } x, y, z \text{ membrul stâng al egalității date este număr natural impar, } \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{deduce că în membrul drept, suma } 2020^a + 2022^b + 2024^c \text{ trebuie să fie un număr impar, deci cel puțin unul dintre numerele } a, b, c \text{ este } 0. \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow abc = 0, \text{ finalizare } P = 1 \dots\dots\dots 1p$$